模块二 函数四类基本题型

第 1 节 指数、对数函数的基本运算与图象性质（★★）

内容提要

本节归纳与指数函数、对数函数有关的一些基础题，下面先回顾有关知识点.

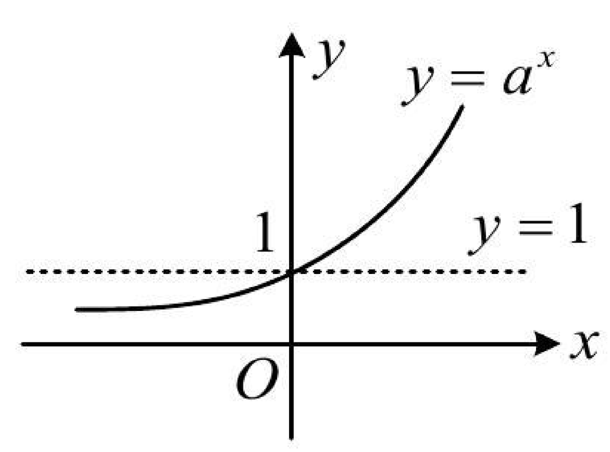
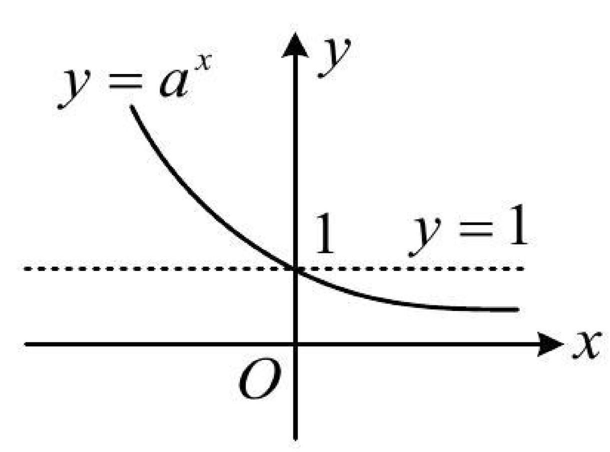
1．指数、对数的运算性质

①指数的运算性质：$a^r\cdot a^s=a^{r+s}$；$(a^r)^s=a^{rs}$；$(ab)^r=a^rb^r$.

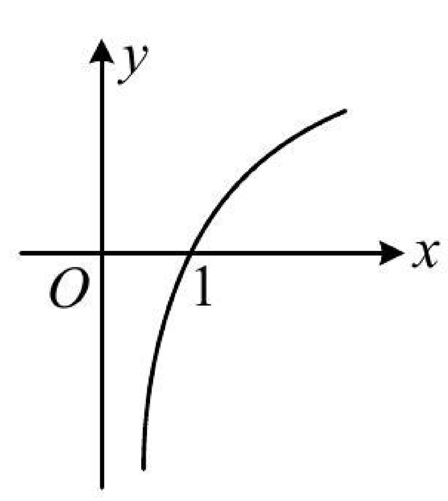
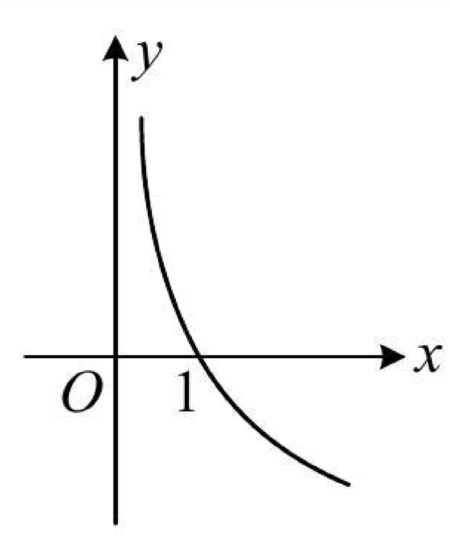
②对数的运算性质：$\log_a M+\log_a N=\log_a(MN)$；$\log_a M-\log_a N=\log_a\dfrac{M}{N}$；

$\log_a M^n=n\log_a M$；$\log_{a^m}b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$；$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$；$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$；$a^{\log_a N}=N$.

2．指数函数的图象性质

<table>
<tr><td>$y=a^x$</td><td>$a>1$</td><td>$0<a<1$</td></tr>
<tr><td>图象</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>定义域</td><td colspan="2">$\mathbf{R}$</td></tr>
<tr><td>值域</td><td colspan="2">$(0,+\infty)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">性质</td><td colspan="2">过点 $(0,1)$，即当 $x=0$ 时，$y=1$</td></tr>
<tr><td>在 $\mathbf{R}$ 上单调递增</td><td>在 $\mathbf{R}$ 上单调递减</td></tr>
</table>

3．对数函数的图象性质

<table>
<tr><td>$y=\log_a x$</td><td>$a>1$</td><td>$0<a<1$</td></tr>
<tr><td>图象</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>定义域</td><td colspan="2">$(0,+\infty)$</td></tr>
<tr><td>值域</td><td colspan="2">$\mathbf{R}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">性质</td><td colspan="2">过点 $(1,0)$，即当 $x=1$ 时，$y=0$</td></tr>
<tr><td>在 $(0,+\infty)$ 上单调递增</td><td>在 $(0,+\infty)$ 上单调递减</td></tr>
</table>

典型例题

类型Ⅰ：指数式、对数式的计算

【例 1】计算：（1）$(\frac{16}{9})^{\frac{1}{2}}+(\frac{3}{2})^{-1}-\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}=$______；（2）$\log_2\frac{1}{8}-\lg 2-\lg 5+2^{\log_2 3}=$______；

（3）$e^{2\ln 3}-\log_4 9\times\log_{27}8+\lg 4+\lg 25=$______；

（4）$\lg\frac{1}{100}-\log_2 3\times\log_5\sqrt{2}\times\log_3 5+\ln\sqrt{e}+2^{1+\log_2 3}=$______.

解析：（1）原式$=[(\frac{4}{3})^2]^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}-\left|\sqrt{3}-2\right|=(\frac{4}{3})^{2\times\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}-(2-\sqrt{3})=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}-2+\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

（2）原式$=-3-(\lg 2+\lg 5)+3=-\lg(2\times 5)=-\lg 10=-1$.

（3）式中$\log_4 9\times\log_{27}8$这部分底数不同，故考虑用换底公式处理，

$\log_4 9\times\log_{27}8=\frac{\ln 9}{\ln 4}\times\frac{\ln 8}{\ln 27}=\frac{\ln 3^2}{\ln 2^2}\times\frac{\ln 2^3}{\ln 3^3}=\frac{2\ln 3}{2\ln 2}\times\frac{3\ln 2}{3\ln 3}=1\Rightarrow$原式$=e^{\ln 3^2}-1+\lg(4\times 25)=9-1+2=10$.

（4）式中$\log_2 3\times\log_5\sqrt{2}\times\log_3 5$这部分底数不同，故考虑用换底公式处理，

$\log_2 3\times\log_5\sqrt{2}\times\log_3 5=\frac{\ln 3}{\ln 2}\times\frac{\ln\sqrt{2}}{\ln 5}\times\frac{\ln 5}{\ln 3}=\frac{\ln 3}{\ln 2}\times\frac{\frac{1}{2}\ln 2}{\ln 5}\times\frac{\ln 5}{\ln 3}=\frac{1}{2}$，

所以原式$=-2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2^1\times 2^{\log_2 3}=-2+2\times 3=4$.

答案：（1）$\sqrt{3}$；（2）-1；（3）10；（4）4

【反思】涉及底数不同的对数运算，常考虑用换底公式化同底.

【例 2】已知$10^a=2$，$100^b=7$，则$10^{2a-2b}=$______.

解析：要求的式子底数为 10，故把$100^b=7$也化为以 10 为底，

$100^b=7\Rightarrow(10^2)^b=10^{2b}=7$，所以$10^{2a-2b}=\frac{10^{2a}}{10^{2b}}=\frac{(10^a)^2}{10^{2b}}=\frac{2^2}{7}=\frac{4}{7}$.

答案：$\frac{4}{7}$

【例 3】已知$\lg 5=a$，$\lg 6=b$，则$\log_3 15=$______.（用 a，b 表示）

解析：已知的是以 10 为底的对数，故把要求的也化为以 10 为底的对数，

由题意，$\log_3 15=\frac{\lg 15}{\lg 3}=\frac{\lg 3+\lg 5}{\lg 3}=\frac{\lg 3+a}{\lg 3}$ ①，

只要再把$\lg 3$用 a，b 表示，代入上式就能解决问题，要产生 lg3，可将已知的 lg6 拆开，

又$b=\lg 6=\lg 2+\lg 3=\lg\frac{10}{5}+\lg 3=\lg 10-\lg 5+\lg 3=1-a+\lg 3$，所以$\lg 3=a+b-1$，

代入①得$\log_3 15=\frac{a+b-1+a}{a+b-1}=1+\frac{a}{a+b-1}$.

答案：$1+\dfrac{a}{a+b-1}$

【例 4】净水机常采用分级过滤，其中第一级过滤一般由孔径为 5 微米的 PP 棉滤芯（聚丙烯熔喷滤芯）构成，其结构是多层式，主要用于去除铁锈、泥沙、悬浮物等各种大颗粒杂质. 假设每一层 PP 面滤芯可以过滤掉三分之一的大颗粒杂质，过滤前水中大颗粒杂质含量为 25mg/L，若要满足过滤后水中大颗粒杂质含量不超过 2.5mg/L，则 PP 棉滤芯层数最少为（　　）（参考数据：$\lg 2\approx 0.30$，$\lg 3\approx 0.48$）

（A）5　　（B）6　　（C）7　　（D）8

解析：设 PP 棉滤芯层数为 n，则过滤后杂质剩余为 $25\times(\frac{2}{3})^n$，由题意，$25\times(\frac{2}{3})^n\le 2.5$，所以 $(\frac{2}{3})^n\le\frac{1}{10}$，

求解指数型不等式，可考虑两端取对数，结合所给参考数据知应取常用对数，

所以 $\lg(\frac{2}{3})^n\le\lg\frac{1}{10}$，从而 $n\lg\frac{2}{3}\le -1$，故 $n(\lg 2-\lg 3)\le -1$，所以 $n\cdot(0.3-0.48)\le -1$，解得：$n\ge\frac{50}{9}$，

结合 $n\in\mathbf{N}^*$ 可得 n 的最小值为 6，故 PP 棉滤芯层数最少为 6.

答案：B

类型Ⅱ：指数函数、对数函数的图象及性质

【例 5】函数 $f(x)=a^{x-2}+1(a>0,a\ne 1)$ 的图象恒过的定点是_____.

解析：寻找指数类函数过的定点，抓住 $a^0=1$ 即可，

令 $x-2=0$ 得 $x=2$，所以 $f(2)=a^0+1=2$，故 $f(x)$ 的图象恒过的定点是 $(2,2)$.

答案：$(2,2)$

【例 6】已知实数 a，b 满足等式 $3^a=6^b$，则下列关系式中不可能成立的是（　　）

（A）$a=b$　　（B）$0<b<a$　　（C）$a<b<0$　　（D）$0<a<b$

解析：涉及两个指数函数的函数值相等，可画图来看自变量的关系，

函数 $y=3^x$ 和 $y=6^x$ 的大致图象如图，$3^a=6^b=t$，则当 $t=1$ 时，$a=b=0$；

当 $t>1$ 时，如图 1，$0<b<a$；当 $0<t<1$ 时，如图 2，$a<b<0$；故选 D.

答案：D

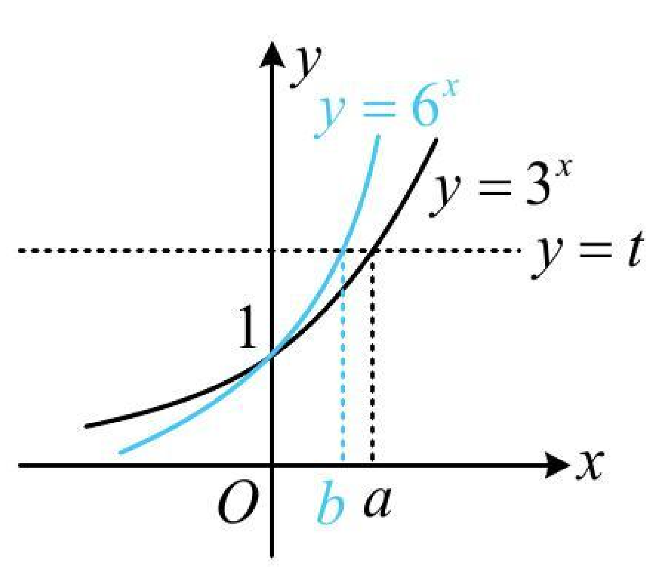


图1

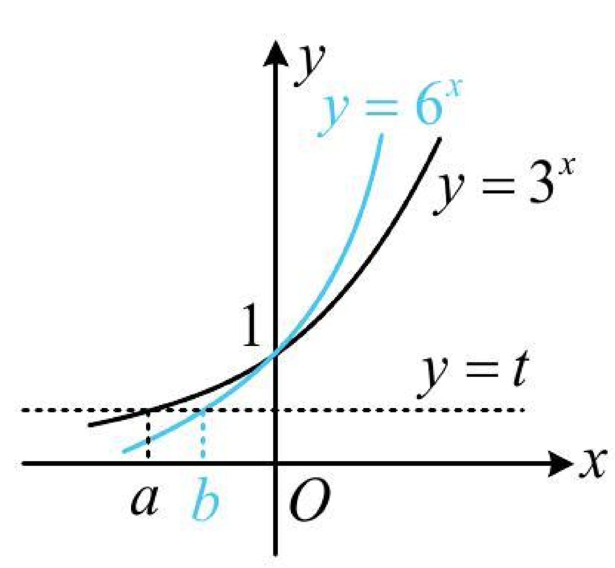


图2

【例 7】若指数函数 $f(x)=b\cdot a^x$ 在 $[b,2]$ 上的最大值与最小值之差是 2，则实数 a 的值为_____.

解析：因为 $f(x)=b\cdot a^x$ 是指数函数，所以 $b=1$，$a>0$ 且 $a\neq 1$，故 $f(x)=a^x$，

要分析 $f(x)$ 的最值，需用单调性，单调性由 a 与 1 的大小决定，故据此讨论，

当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $[1,2]$ 上↘，所以 $f(x)_{\max}=f(1)=a$，$f(x)_{\min}=f(2)=a^2$，

由题意，$a-a^2=2$，此方程无解，不合题意；

当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 $[1,2]$ 上↗，所以 $f(x)_{\max}=f(2)=a^2$，$f(x)_{\min}=f(1)=a$，

由题意，$a^2-a=2$，解得：$a=2$ 或 -1（舍去）；

综上所述，实数 a 的值为 2.

答案：2

【反思】对概念的识记一定要准确，指数函数是 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$，其系数必须是 1，而像 $y=2a^x$ 这种函数，就不能叫指数函数.

【例 8】当 $0<x\leq\dfrac{1}{2}$ 时，$4^x<\log_a x$ 恒成立，则 a 的取值范围为_____.

解析：不等式 $4^x<\log_a x$ 无法直接解，考虑画图分析，底数 a 与 1 的大小不定，故需讨论，

当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ ↗，如图 1，$4^x<\log_a x$ 不可能在 $(0,\dfrac{1}{2}]$ 上恒成立；

当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ ↘，如图 2，要使 $4^x<\log_a x$ 在 $(0,\dfrac{1}{2}]$ 恒成立，只需在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处成立即可，

所以 $4^{\frac{1}{2}}<\log_a\dfrac{1}{2}$，从而 $\log_a\dfrac{1}{2}>2=\log_a a^2$，故 $\dfrac{1}{2}<a^2$，结合 $0<a<1$ 可得 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<a<1$.

答案：$(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1)$

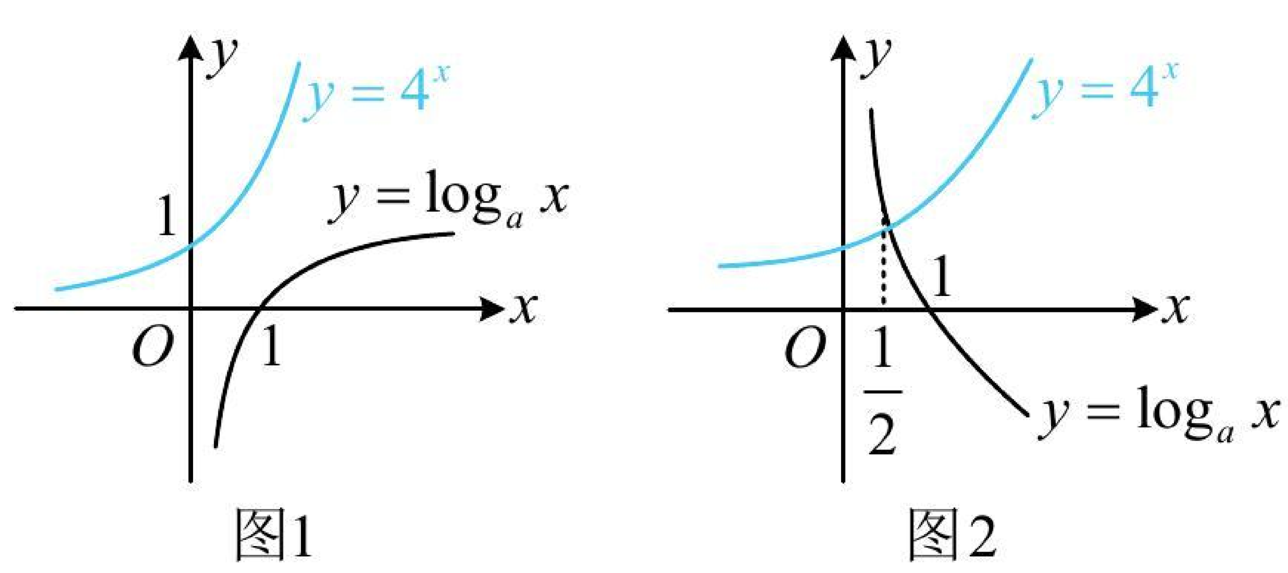


图1　　　　图2

【例 9】（2020 • 新高考 II 卷）已知函数 $f(x)=\lg(x^2-4x-5)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，则 a 的取值范围是（　　）

（A）$(2,+\infty)$　　（B）$[2,+\infty)$　　（C）$(5,+\infty)$　　（D）$[5,+\infty)$

解析：$f(x)$ 由 $y=\lg u$ 和 $u=x^2-4x-5$ 复合而成，可用同增异减准则分析单调性，

$x^2-4x-5>0\Leftrightarrow x<-1$或$x>5$，所以$f(x)$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$，

设$u=x^2-4x-5$，则当$x\in(-\infty,-1)$时，$u=x^2-4x-5\searrow$，$y=\lg u\nearrow$，所以$f(x)\searrow$，

当$x\in(5,+\infty)$时，$u=x^2-4x-5\nearrow$，$y=\lg u\nearrow$，所以$f(x)\nearrow$，故$f(x)$的单调递增区间是$(5,+\infty)$，

因为$f(x)$在$(a,+\infty)$上$\nearrow$，所以$(a,+\infty)\subseteq(5,+\infty)$，故$a\geq 5$.

答案：D

强化训练

1．（2023•湖南邵阳模拟•★）$(\frac{2}{\sqrt{3}})^{-2}+(\sqrt{5}-\pi)^0-(\frac{49}{16})^{\frac{1}{2}}=$_____.

2．（2023•浙江宁波模拟•★★）$(\log_4 3+\log_8 3)(\log_3 2+\log_9 2)+(\frac{64}{27})^{-\frac{1}{3}}=$_____.

3．（2023•福建莆田模拟•★★）$(\lg 5)^2+\lg 2\times\lg 5+\lg 20+\log_2 25\times\log_3 4\times\log_5 9=$_____.

4．（2023•全国模拟•★★）已知$\log_a 3=m$，$\log_a 4=n$，则$a^{2m-n}=$_____.

5．（★★★）设$f(x)$是定义在**R**上的偶函数，且在$(-\infty,0]$上单调递增，若实数a满足$f(2^{\log_3 a})>f(-\sqrt{2})$，则$a$的取值范围是_____.

6．（2023•云南模拟•★★★）函数$f(x)=(\log_4\frac{x^2}{2})\cdot(\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{8})$的最大值为_____.

7．（2023·四川凉山二模·★★）C_0表示生物体内碳 14 的初始质量，经过 t 年后碳 14 剩余质量 $C(t)=C_0(\frac{1}{2})^{\frac{t}{h}}(t>0,h$为碳 14 的半衰期)．现测得一古墓内某生物体内碳 14 含量为$0.4C_0$，据此推算该生物是距今多少年前的生物（参考数据：$\lg 2\approx 0.301$）．正确选项是（　　）

（A）$1.36h$　（B）$1.34h$　（C）$1.32h$　（D）$1.30h$

8．（2023·新高考Ⅰ卷·★★★）（多选）噪声污染问题越来越受到重视. 用声压级来度量噪声的强度，定义声压级$L_P=20\times\lg\frac{p}{p_0}$，其中常数$p_0(p_0>0)$是听觉下限阈值，$p$是实际声压. 下表为不同声源的声压级：

声源	与声源的距离/m	声压级/dB
燃油汽车	10	60~90
混合动力汽车	10	50~60
电动汽车	10	40

已知在距离燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车 10m 处测得实际声压分别为p_1，p_2，p_3，则（　　）

（A）$p_1\ge p_2$　（B）$p_2>10p_3$　（C）$p_3=100p_0$　（D）$p_1\le 100p_2$